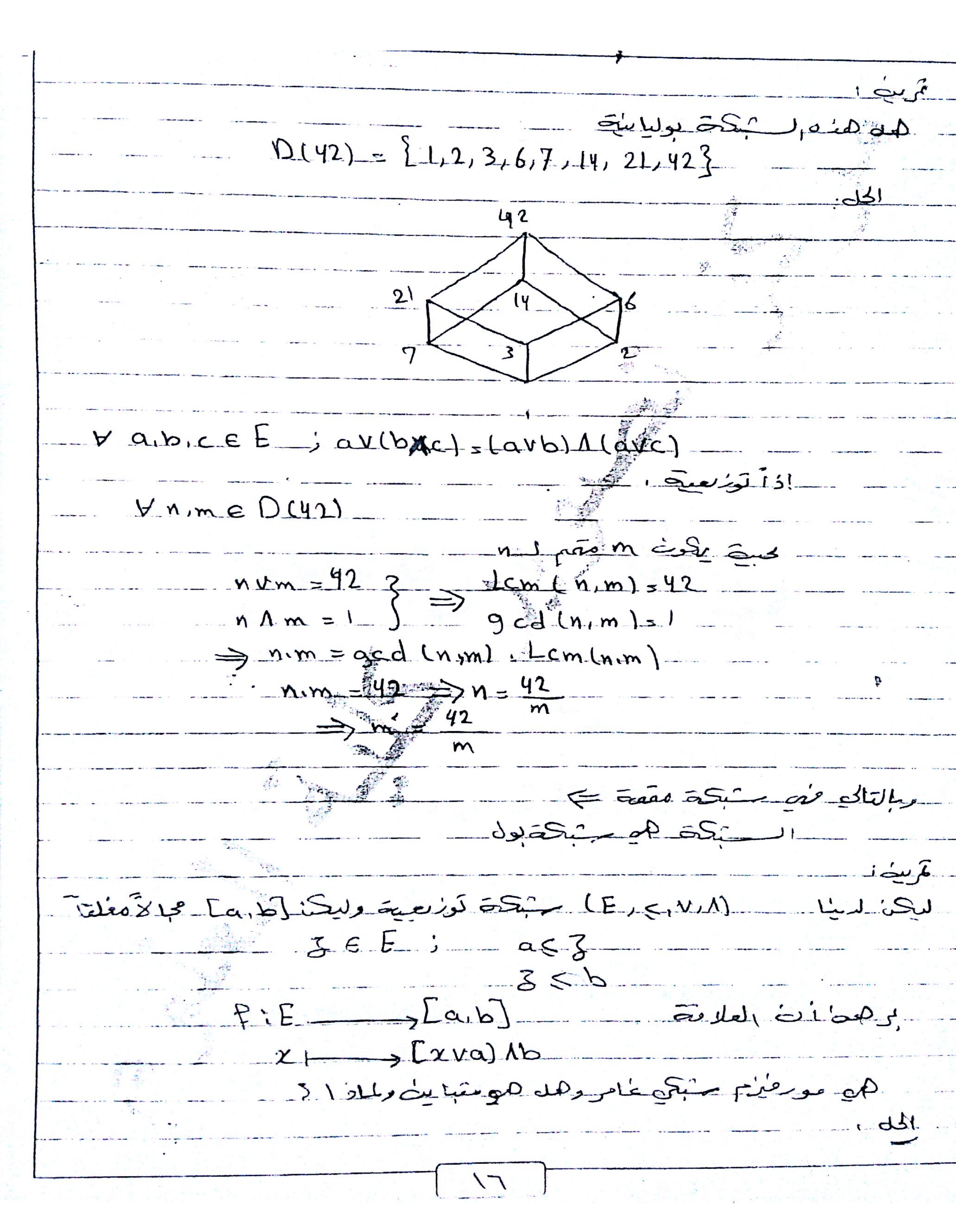


تمرين ١

هل هذه الشبكة بوليانية

$D(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

الحل:

$\forall\, a, b, c \in E \;;\; a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

إذاً توزيعية،

$\forall\, n, m \in D(42)$

بحيث يكون m متمم لـ n

$$\left.\begin{array}{l} n \vee m = 42 \\ n \wedge m = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} lcm(n,m) = 42 \\ gcd(n,m) = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow n.m = gcd(n,m) . lcm(n,m)$

$n.m = 42 \Rightarrow n = \frac{42}{m}$

$\Rightarrow n' = \frac{42}{m}$

وبالتالي فهي شبكة متممة ⇐

الشبكة هي شبكة بول

تمرين:

ليكن لدينا $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة توزيعية وليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً

$z \in E \;;\; a \leq z$

$z \leq b$

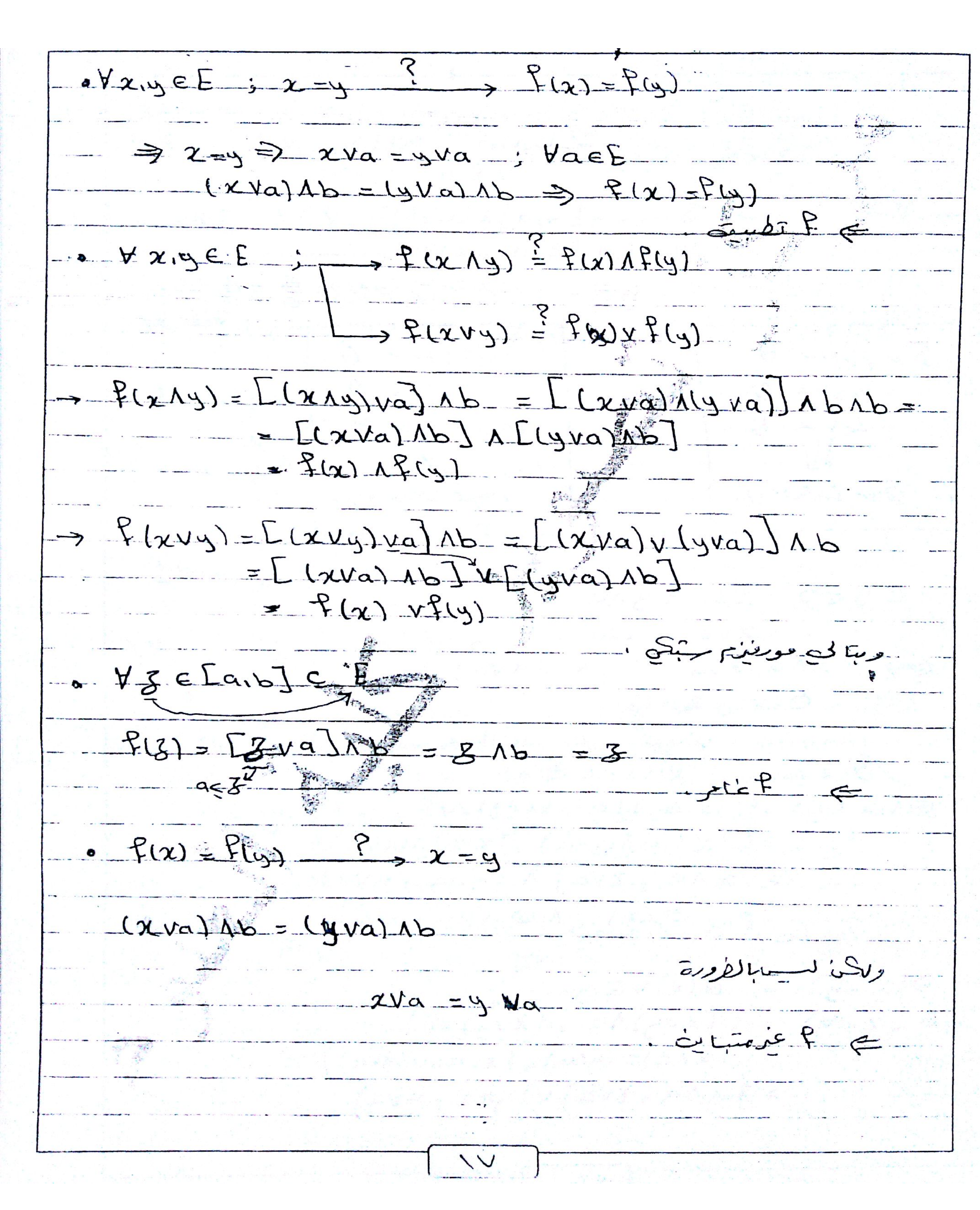
برهن أن العلاقة

$f : E \longrightarrow [a,b]$

$x \longmapsto (x \vee a) \wedge b$

هي مورفيزم شبكي تام وهل هو متباين ولماذا ؟

الحل:



• $\forall x,y \in E \; ; \; x = y \xrightarrow{?} f(x) = f(y)$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow x \vee a = y \vee a \; ; \; \forall a \in E$

$(x \vee a) \wedge b = (y \vee a) \wedge b \Rightarrow f(x) = f(y)$

⇐ f تطبيق .

• $\forall x,y \in E \; ;$

$\rightarrow f(x \wedge y) \overset{?}{=} f(x) \wedge f(y)$

$\rightarrow f(x \vee y) \overset{?}{=} f(x) \vee f(y)$

$\rightarrow f(x \wedge y) = [(x \wedge y) \vee a] \wedge b = [(x \vee a) \wedge (y \vee a)] \wedge b \wedge b =$

$= [(x \vee a) \wedge b] \wedge [(y \vee a) \wedge b]$

$= f(x) \wedge f(y)$

$\rightarrow f(x \vee y) = [(x \vee y) \vee a] \wedge b = [(x \vee a) \vee (y \vee a)] \wedge b$

$= [(x \vee a) \wedge b] \vee [(y \vee a) \wedge b]$

$= f(x) \vee f(y)$

وبالتالي مورفيزم شبكي .

• $\forall z \in [a,b] \subset E$

$f(z) = [z \vee a] \wedge b = z \wedge b = z \quad ; \; a \leq z$

⇐ f غامر

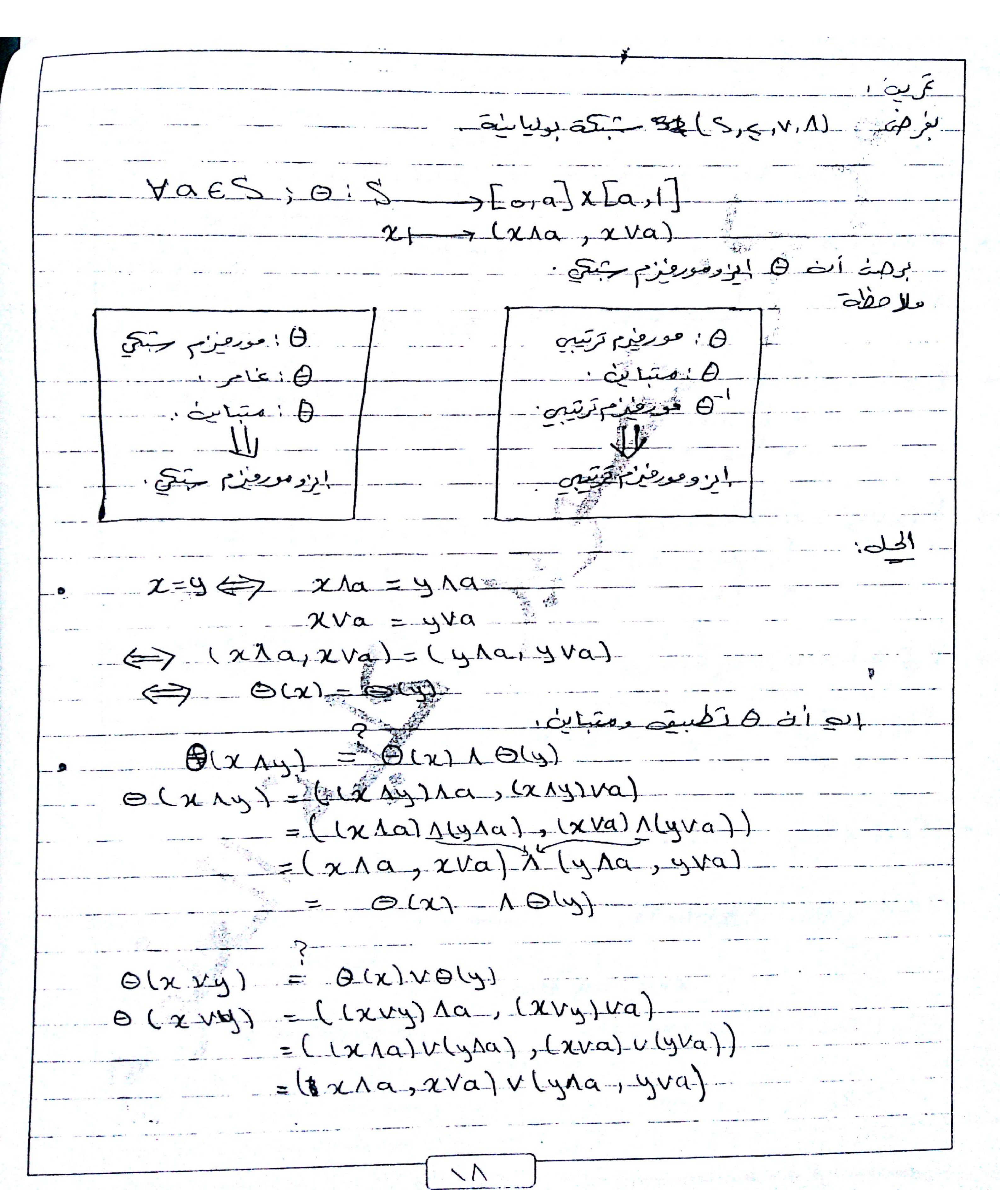
• $f(x) = f(y) \xrightarrow{?} x = y$

$(x \vee a) \wedge b = (y \vee a) \wedge b$

ولكن ليس بالضرورة

$x \vee a = y \vee a$

⇐ f غير متباين .



تمرين :

نفرض $(S, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة بوليانية.

$$\forall a \in S \; ; \; \theta : S \longrightarrow [0,a] \times [a,1]$$

$$x \longmapsto (x \wedge a \,,\, x \vee a)$$

برهن أن θ إيزومورفيزم شبكي.

ملاحظة

θ : مورفيزم ترتيبي θ : متباين θ^{-1} : مورفيزم ترتيبي $\Downarrow$ إيزومورفيزم ترتيبي	θ : مورفيزم شبكي θ : غامر θ : متباين $\Downarrow$ إيزومورفيزم شبكي

الحل:

- $x = y \iff x \wedge a = y \wedge a$ و $x \vee a = y \vee a$

$\iff (x \wedge a, x \vee a) = (y \wedge a, y \vee a)$

$\iff \theta(x) = \theta(y)$

اذن أن θ تطبيق ومتباين.

- $\theta(x \wedge y) \overset{?}{=} \theta(x) \wedge \theta(y)$

$\theta(x \wedge y) = ((x \wedge y) \wedge a \,,\, (x \wedge y) \vee a)$

$= ((x \wedge a) \wedge (y \wedge a) \,,\, (x \vee a) \wedge (y \vee a))$

$= (x \wedge a \,,\, x \vee a) \wedge (y \wedge a \,,\, y \vee a)$

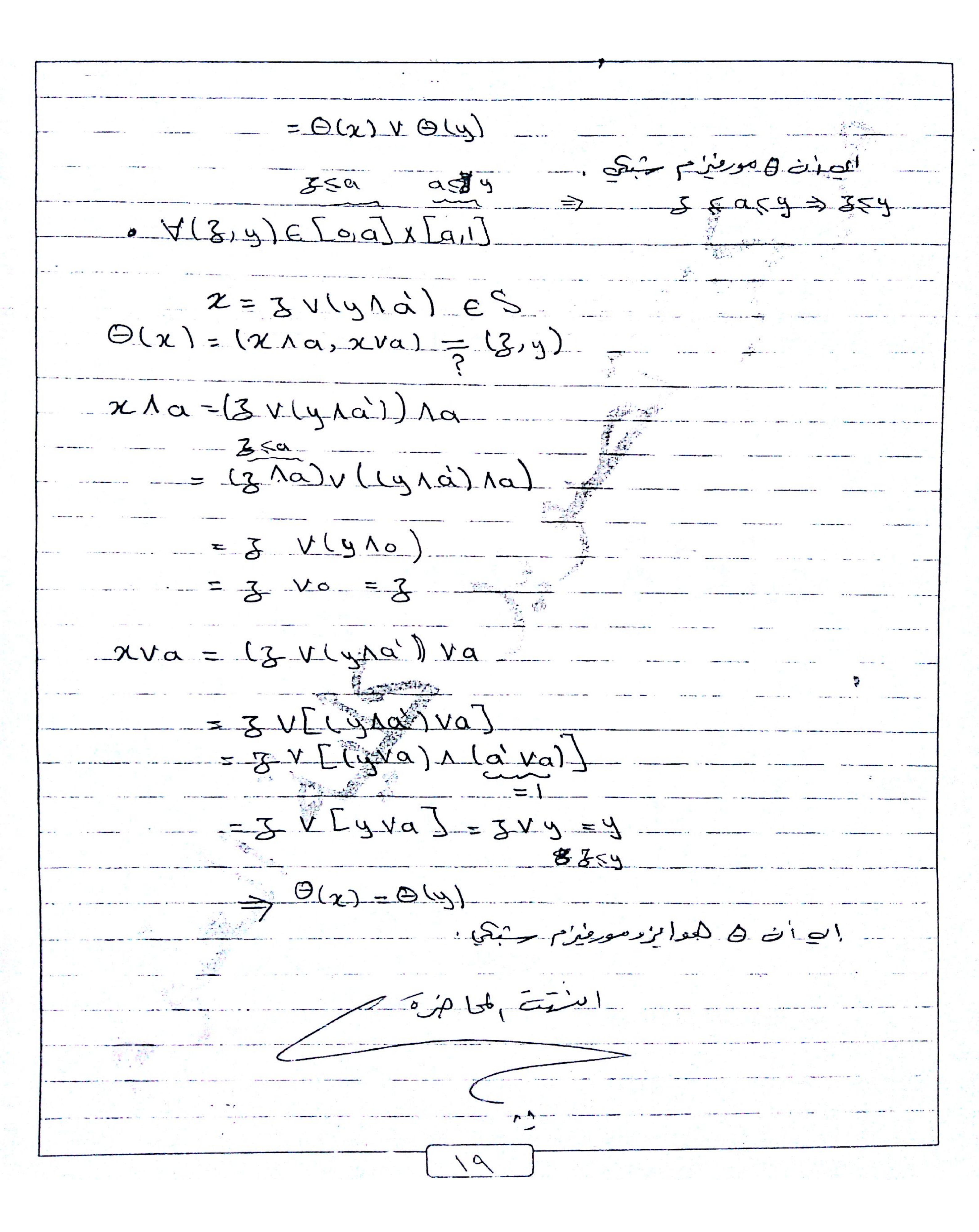
$= \theta(x) \wedge \theta(y)$

$\theta(x \vee y) \overset{?}{=} \theta(x) \vee \theta(y)$

$\theta(x \vee y) = ((x \vee y) \wedge a \,,\, (x \vee y) \vee a)$

$= ((x \wedge a) \vee (y \wedge a) \,,\, (x \vee a) \vee (y \vee a))$

$= (x \wedge a \,,\, x \vee a) \vee (y \wedge a \,,\, y \vee a)$



$= \Theta(x) \vee \Theta(y)$

اي ان Θ مورفيزم شبكي .

$z \le a \quad a \le y \Rightarrow z \le a \le y \Rightarrow z \le y$

• $\forall (z, y) \in [0, a] \times [a, 1]$

$x = z \vee (y \wedge a') \in S$

$\Theta(x) = (x \wedge a, x \vee a) \overset{?}{=} (z, y)$

$x \wedge a = (z \vee (y \wedge a')) \wedge a$

$= (\underset{z \le a}{z \wedge a}) \vee ((y \wedge a') \wedge a)$

$= z \vee (y \wedge 0)$

$= z \vee 0 = z$

$x \vee a = (z \vee (y \wedge a')) \vee a$

$= z \vee [(y \wedge a') \vee a]$

$= z \vee [(y \vee a) \wedge \underbrace{(a' \vee a)}_{=1}]$

$= z \vee [y \vee a] = z \vee y = y \quad (z \le y)$

$\Rightarrow \Theta(x) = \Theta(y)$

اي ان Θ ايزومورفيزم شبكي .

انتهت المحاضرة